



# Mathematik mit funktionaler Programmierung

Henning Thielemann

2005-05-27





- 1 Stile
- 2 Typen
- 3 Paradigmen
- 4 Funktionaler Ansatz
  - Rechnen mit Funktionen
- 5 Verzögerte Auswertung
  - Modularisierung durch verzögerte Auswertung
- 6 Schluss





- 1 **Stile**
- 2 Typen
- 3 Paradigmen
- 4 Funktionaler Ansatz
- 5 Verzögerte Auswertung
- 6 Schluss





# Gewöhnlicher Programmierstil

- Starte mit altem Programmtext.
- Kopiere Programmtext aus anderen Programmen zusammen.
- Schreibe einfache Funktionen neu.
- Versuche nicht, in Berechnungsabschnitte zu unterteilen.  
Packe alles in eine Schleife oder in ein Hauptprogramm.
- Globale Variablen für kürzere Parameterlisten.
- Fehlerursachen nicht auf den Grund gehen (keine Zeit).  
Fehlerhaft verarbeitete Eingaben getrennt behandeln (Flicken).
- Übersetzerwarnungen unterdrücken oder ignorieren,  
Programm läuft schließlich auch so (keine Zeit).
- Einmal geschriebenes niemals verbessern, sonst riskiert man  
Lauffähigkeit.



## Gewöhnlicher Programmierstil: Beispiele

- „Mach ich ja nur für mich“, „Mach ich ja nur für die Übung“, „Mach ich ja nur für die Firma“, „Will ja nur was ausprobieren“, „Geb ich ja nicht weiter“
- Beispiel 1:  
Gerd findet Fehlverhalten der IGPM-Bibliothek in speziellem Fall ( $n = 0?$ ). Statt nach Fehler zu suchen, mit `if (n==0)` spezielle Behandlung des Falles.
- Beispiel 2:  
Änderung der Übersetzer-URL in HTML-Übersetzer
  - Schlecht: Fertig übersetzte HTML-Seiten mit Suchen&Ersetzen nachbearbeiten (perl)
  - Besser: Übersetzer ändern
  - Perfekt: URL von Benutzer anpassbar



# Sauberer Programmierstil

- Starte mit leerem Programm.
- Möglichst viel mit Bibliotheksfunktionen erreichen. Erleichtert das Verstehen des Programmes. Bibliotheken hoffentlich gut optimiert und getestet. Falls doch nicht → Optimierung oder Fehlerbereinigung kommt allen Benutzern zugute.
- Funktion in mehreren Programmteilen gebraucht? → verallgemeinern, auslagern
- Programm in kleine für sich verständliche Teile zerlegen.
- Programmtext nicht kopieren. Kopien müssen getrennt aktualisiert und von Fehlern bereinigt werden.
- Trenne reine Berechnungen von Ein-/Ausgabe.



Sprachen können keinen Stil erzwingen, aber unterstützen.  
Wie kann sauberer Stil unterstützt werden?

- Modularisierung
- Statische Typenkontrolle





1 Stile

2 Typen

3 Paradigmen

4 Funktionaler Ansatz

5 Verzögerte Auswertung

6 Schluss





## Typen: schwach vs. stark

- Schwach getypt: Möglichst große Wertemenge als Typ, behandle möglichst viele Werte gleich.
  - Shell, REXX: Alles ist Text
  - MatLab: Alles ist komplexwertige Matrix, „1“ bezeichnet komplexwertige  $1 \times 1$ -Matrix.
  - C: Ganze Zahlen, Zeichen, Wahrheitswerte, Aufzählungen, Bitfelder – unterstützt aber nicht unterschieden
- Stark getypt: Sehr feine Unterteilung in Typen
  - Haskell, Pascal, Modula, Oberon, Ada: Strenge Unterscheidung zwischen Wahrheitswerten, Zeichen, Aufzählungen, ganzen Zahlen, Näherungswerten (Gleitkommazahlen), Brüchen, Zahlen mit Fehlerschranken, komplexen Zahlen, Restklassen, Polynomen, Vektoren, Matrizen





# Typen: dynamisch vs. statisch

Wann Typen festgelegt?

- dynamische Typisierung: zur Laufzeit – mehr Freiheit?  
Beispiele: MatLab, LISP, Python, allgemein Skriptsprachen, objektorientierte Typen auch in ansonsten statisch typisierten Sprachen
- statische Typisierung: zur Übersetzungszeit – schnellere Fehlererkennung!  
Beispiele: Haskell, OCaml, Pascal, Modula, Oberon, Eiffel, Ada, C, C++





# Statische Polymorphie

- Typvariablen: Funktion kann für vielerlei Typen verwendet werden, trotzdem statische Sicherheit  
Beispiel: **tail** :: [a] -> [a]
- automatischer Typenabgleich (Typinferenz)  
Beispiel: weil "Wese1" :: [**Char**] ist in **tail** "Wese1" der Typ **tail** :: [**Char**] -> [**Char**]
- Typklassen: Einschränkungen für Typvariablen  
Beispiel: **Num** für Zahlentypen  
(+) :: **Num** a => a -> a -> a





- 1 Stile
- 2 Typen
- 3 Paradigmen**
- 4 Funktionaler Ansatz
- 5 Verzögerte Auswertung
- 6 Schluss



# Programmieransätze und Programmflussgraphen

imperativ	geradliniger Graph
funktional	Baum
funktional, verzögert	Baum mit Schleifen, gerichteter Graph
logisch	ungerichteter Graph

- Je freier Graph wählbar, desto mehr Arbeit für Optimierer, desto weniger Arbeit für Programmierer.
- Mehr Freiheit bei Gestaltung des Programmflussgraphen = Mehr Möglichkeiten bei Modularisierung und übersichtlicher Programmierung.
- Qual der Wahl: Viele Möglichkeiten erhöhen Verantwortung des Programmierers und erschweren Auffinden des Optimums



- 1 Stile
- 2 Typen
- 3 Paradigmen
- 4 **Funktionaler Ansatz**
- 5 Verzögerte Auswertung
- 6 Schluss





# Funktionale Programmierung

- Funktionen sind alleinige Berechnungseinheiten
- keine Abfolge von Schritten (imperativ)
- nur Beschreibung von Transformationen und Datenflüssen

Funktionale Programmierung

=

Imperative Programmierung mit Funktionen nur ohne  
Befehlsfolgen?

Nein!

Weglassen imperativer Elemente gibt mehr Garantien



## Keine Seiteneffekte

- Referential transparency  
Funktionswert hängt allein von Argumenten ab  
Beispiel:  $\sin 1$  hat überall den gleichen Wert  
Gegenbeispiel: `IO.GetInt()` ;
- explizite Datenflüsse → mehr Sicherheit
- problematisch: Ein-/Ausgabe, Zufallszahlen → Monade
- einfache Programmtransformationen durch Ersetzungsregeln  
Anwendungen: Optimierung, Ableitung

```
{-# RULES
  "map/dot" forall f g.
    map f . map g = map (f . g) ;
#-}
```

- automatische Tests

Stile Typen Paradigmen Funktionaler Ansatz Verzögerte Auswertung Schluss

# Programmbeweise

- Korrektheitsbeweise für imperative Programme immer auf funktionale Formulierung bezogen
- Beispielbehauptungen:
  - **map** (f . g) == **map** f . **map** g
  - (x ++ y) ++ z == x ++ (y ++ z)
- Beweisbeispiel: Definition

```
data [a] = a : [a]
         | []

(++): [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ y = y
(x:xs) ++ y = x : (xs ++ y)
```

# Beweisbeispiel

Beweis mit Induktion

Fall  $x == []$

```
[] ++ (y ++ z)
y ++ z
([], ++ y) ++ z
```

Fall  $x \neq []$ , also  $x == (a : as)$

```
(a : as) ++ (y ++ z)
a : (as ++ (y ++ z))
a : ((as ++ y) ++ z)  -- Induktionsschritt
((a : (as ++ y)) ++ z)
((a : as) ++ y) ++ z
```



# Unveränderliche Werte

- keine Änderungsoperationen, etwa  $INC(n)$  ;
- keine (globalen) Variablen
- stattdessen Transformation: alter Wert  $\rightarrow$  neuer Wert
- Übersetzer muss optimieren
- (gedachte) gleichzeitige Existenz aller Objekte  
Vergleiche: Differentialgleichungen mit unveränderlichen Funktionen statt mit veränderlichen Größen  
Wie in Mathematik  $x_{i+1} = f(x_i)$  statt  $x := f(x)$
- Konstanz nicht Bestandteil von Typen (wie in C++)





## Funktionen höherer Ordnung

- keine Schleifen oder andere Programmflussstrukturen  
statt festverdrahtet IF, FOR, WHILE, Funktionen höherer  
Ordnung **maybe**, **map**, **foldr**



```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

- **map** (1+) [0,1,2,3,4,5] = [1,2,3,4,5,6]
- **map** (>=0) [-2,-1,0,1,2] =  
[**False**,**False**,**True**,**True**,**True**]
- Beachte: Keine Indizes! → Prinzip: „Führe nur ein, was du brauchst.“



## Funktionen mit mehreren Parametern

- theoretisch überflüssig, aber syntaktisch unterstützt  
Uncurried Form  $(a, b) \rightarrow c$  Symmetrie  
Curried Form  $a \rightarrow b \rightarrow c$  unvollständige Auswertung
- unvollständige Auswertung

```
map      :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f    ::                [a] -> [b]
map f xs ::                [b]
(+)      :: a -> a -> a
(+) 1    ::                a -> a
(+) 1 2  ::                a
(1+)     ::                a -> a
(1+2)    ::                a
```



# Funktionale Notationen

- Lambda-Notation:  $\lambda \ x \mapsto x^2 + 1$
- Eta-Reduktion:

$$f \ x \ y = g \ a \ b \ x \ y$$

$$f \ x = g \ a \ b \ x$$

$$f = g \ a \ b$$

$$f = \lambda x \rightarrow g \ a \ b \ x$$

$$f = \lambda x \rightarrow \lambda y \rightarrow g \ a \ b \ x \ y$$

$$f = \lambda x \ y \rightarrow g \ a \ b \ x \ y$$



## Modularisierung durch HOF: all

```
all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
all p xs = and (map p xs)
```

```
and :: [Bool] -> Bool
and = foldr (&&) True
```

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
(&&) False _ = False
(&&) _ y = y
```

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr _ y [] = y
foldr f y (x:xs) = f x (foldr f y xs)
```





# Dokumentation durch Typen

- Analog: `sum = foldl (+) 0`
- Kristian sucht Funktion, welche Signal numerisch integriert  
Wie sucht man Funktion, deren Existenz man vermutet aber deren Namen man nicht kennt?
  - Naheliegende Namen probieren?
  - Struktur der Dokumentation zur Einschachtelung verwenden?
  - Kollegen fragen?
  - Selbst schreiben?

## Haskells Lösung

- Typen verraten Parameter und Funktionswert
- durchsuche Haskell-Modul `Data.List` nach Funktion, welche Liste in Liste umwandelt (`[?] -> [?]`)
- finde `scanl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> [a]`
- kombiniere Lösung `scanl (+) 0`





## Rechnen mit Funktionen: Strecken und Stauchen

```
shrink :: Num a =>
  a -> (a -> b) -> (a -> b)
shrink t f x = f (x * t)

dilate :: Fractional a =>
  a -> (a -> b) -> (a -> b)
dilate t f x = f (x / t)

translateR, translateL :: Num a =>
  a -> (a -> b) -> (a -> b)
translateR t f x = f (x - t)
translateL t f x = f (x + t)
```





## Rechnen mit Funktionen: Verketteten und Ableiten

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
(.) f g x = f (g x)
-- alternativ: (f . g) x = f (g x)

diff :: Fractional a =>
  a -> (a -> a) -> (a -> a)
diff eps f x =
  let epsh = eps/2
  in (f(x+epsh) - f(x-epsh)) / eps
```





# Polynomauswertung

Horner-Schema

```
horner :: Num a => [a] -> (a -> a)
horner p x = foldr (\c s -> c+x*s) 0 p
```

horner ist Auswertungshomomorphismus:

- verwandelt Polynom in eine Funktion
- wenn  $p$  Polynom, dann ist `horner p` Funktion
- Übung: Implementiere `convolve` und beweise

$$\text{horner } p_0 \ x \ * \ \text{horner } p_1 \ x \\ == \text{horner } (\text{convolve } p_0 \ p_1) \ x$$




- 1 Stile
- 2 Typen
- 3 Paradigmen
- 4 Funktionaler Ansatz
- 5 **Verzögerte Auswertung**
- 6 Schluss



# Strikte und nicht strikte Auswertung

## Strikte Auswertung

- wenn  $x$  undefiniert, dann  $f\ x$  undefiniert
- Undefiniertheit zum Beispiel durch Endlosschleife
- Ergebnisse immer sofort berechnet
- imperative Sprachen (fast?) immer strikt
- funktionale Sprachen manchmal strikt: LISP, OCaml

## Alternative: verzögerte Auswertung (lazy evaluation)

- Ergebnis wird erst berechnet, wenn es gebraucht wird
- funktionale Sprachen: Haskell, Clean
- unendlich große Datenstrukturen
- Beispiel: endloser Ton



# Neue Zerlegungsmöglichkeiten

- miteinander verwobene Berechnungen auftrennen
- Trennung von Berechnung und Ausgabe
- Beispiel Vektoraddition
  - strikt (MatLab):  
 $x+y+z$  rechnet erst  $x+y$  komplett aus, dann  $(x+y)+z$
  - verzögert (Haskell):  
**zipWith** (+) rechnet Vektorsumme elementweise aus  
Beispiel:

```
take 10 (zipWith3 (\x y z -> x+y+z)  
          (repeat 1) (repeat 2) (repeat 3))
```





# Folgen, Grenzwerte

- Näherungsverfahren  
approx ::  $b \rightarrow [a]$ 
  - Newton-Verfahren
  - Gradientenabstieg
- numerischer Grenzwert  
lim ::  $[a] \rightarrow a$ 
  - Abbruch nach fester Anzahl
  - Abbruch falls aufeinanderfolgende Werte nur geringfügig verschieden
  - Abbruch falls nah genug an Ziel
- Konvergenzbeschleuniger  
accelerate ::  $[a] \rightarrow [a]$





# Reihen

- Übergang von Folge zu Reihe  
**scanl** (+) 0 :: [a] -> [a],  
Reihenwert = Grenzwert der Partialsummenfolge  
`lim . scanl (+) 0`
- Funktionen für alle Aufgaben frei kombinierbar, weil potenziell unendliche Listen möglich





## Reihengrenzwert: imperativ und strikt (Modula-3)

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

```
PROCEDURE ExpSeries (x,tol: LONGREAL;):LONGREAL =
  VAR
    sum      : LONGREAL := 0.0D0;
    summand  : LONGREAL := 1.0D0;
    n        : CARDINAL := 0;
  BEGIN
    WHILE ABS(summand) > tol DO
      sum := sum + summand;
      INC(n);
      summand := summand*x / FLOAT(n, LONGREAL);
    END;
    RETURN sum;
  END ExpSeries;
```



## Reihengrenzwert: funktional und verzögert (Haskell)

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

```
eval :: Double -> [Double] -> Double -> Double
eval tol ys x =
    let powers      = iterate (x*) 1
        summands   = zipWith (*) ys powers
        trunc      = takeWhile (\y -> abs y > tol)
    in  sum (trunc summands)

series :: [Double]
series = scanl (/) 1 (iterate (1+) 1)

exp :: Double -> Double -> Double
exp tol = eval tol series
```

## Geht das auch bei imperativen Sprachen?

- Verzögerte Auswertung bei imperativen Sprachen nahezu unmöglich, Berechnung darf nur von Parametern abhängen
- Kann MatLab Lazy? Wieso funktioniert

```
>> for k = 0:1000000000; end
```

- Vektorschreibweise 0:1000000000 ist nicht nur Zucker

```
>> for k = (5:7).^2; disp(k); end  
25  
36  
49
```

- Aber

```
>> for k = (0:1000000000)*1; end  
??? Error using ==> :  
Maximum variable size allowed by the prog ...
```



## Explizites Euler-Verfahren für Differentialgleichung

$$u = c_0 \cdot y + c_1 \cdot y' + y''$$
$$y'' = u - (c_0 \cdot y + c_1 \cdot y')$$

```
osciODE :: Num a =>
  (a,a) -> (a,a) -> [a] -> [a]
osciODE (c0,y0) (c1,y'0) u =
  let phi ui yi y'i =
        ui - (c0 * yi + c1 * y'i)
      integrate = scanl (+)
      y = integrate y0 y'
      y' = integrate y'0 y''
      y'' = zipWith3 phi u y y'
  in y
```





# Wurzeln von Potenzreihen

Gegeben: Potenzreihe  $p$

Gesucht: Potenzreihe  $r$  mit  $r(t)^2 = p(t)$

$$p(t) = p_0 + t \cdot p_1(t)$$

$$r(t) = r_0 + t \cdot r_1(t)$$

$$r(t)^2 = r_0^2 + 2 \cdot r_0 \cdot t \cdot r_1(t) + t^2 \cdot r_1(t)^2$$

$$p_0 = r_0^2$$

$$r_0 = \sqrt{p_0}$$

$$p_1(t) = 2 \cdot r_0 \cdot r_1(t) + t \cdot r_1(t)^2$$

$$r_1(t) = \frac{p_1(t) - t \cdot r_1(t)^2}{2 \cdot r_0}$$





# Wurzeln von Potenzreihen

$$r_0 = \sqrt{p_0}$$
$$r_1(t) = \frac{p_1(t) - t \cdot r_1(t)^2}{2 \cdot r_0}$$

```
sqrtSeries :: Floating a => [a] -> [a]
sqrtSeries (p0:p1) =
  let r0 = sqrt p0
      r1 = map (/(2*r0))
              (sub p1 (0 : mul r1 r1))
  in r0:r1
```





- 1 Stile
- 2 Typen
- 3 Paradigmen
- 4 Funktionaler Ansatz
- 5 Verzögerte Auswertung
- 6 **Schluss**





# Zusammenfassung

- Funktionale Programmierung mit verzögerter Auswertung, strenger Typisierung und automatischem Typenabgleich ist supercool, wenn nicht sogar megageil.
- Alles andere ist Spielzeug.
- Ist nur was für Erwachsene.
- Wer nach der Geschwindigkeit oder dem Speicherverbrauch fragt, kriegt was vor den Latz.
- Geht endlich nach Hause.

